О ПОСТРОЕНИИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ С КОНТУРНЫМИ ВЫРЕЗАМИ

С. Ф. Андреев

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Трещины, возникающие на краях отверстий в элементах конструкций, рассматривают как предельные источники концентрации напряжений. Они моделируются в виде вырезов контура отверстия с бесконечно малыми радиусами закругления в вершине. При этом местные напряжения и деформации могут быть получены методом Н. И. Мусхелишвили с применением конформного отображения, преобразующего внешность единичного круга на заданную область S. В настоящей работе предлагается численный алгоритм решения задачи о построении конформно отображающей функции бесконечной односвязной области S, ограниченной кусочно-гладким контуром L с вырезом. Актуальность задачи обусловлена применением отображающей функции в расчетах коэффициента интенсивности напряжений для пластин и оболочек с ослабленными раскрывающимися трещинами отверстиями.

На основании совместного применения интеграла Кристоффеля–Шварца и метода тригонометрической интерполяции построен алгоритм конформного отображения внешности единичного круга на внешность области S, ограниченной кусочно-гладкой замкнутой кривой L, которая может быть задана дискретным рядом точек $M_\gamma(z_\gamma)$, $(\gamma = 0, 1, 2, \ldots, N)$. Функция $\omega(\varsigma)$, позволяющая с любой степенью точности осуществить указанное отображение, ищется в виде полинома, регулярного в области $|\varsigma| \geq 1$. Коэффициенты полинома, при которых интерполяционный многоугольный контур L^* имеет параметрическое уравнение $z_\gamma^* = \omega(\exp(i\theta_\gamma))$, находим по формуле

$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{\gamma=-1}^{N} z_\gamma \cdot \exp(i \cdot k \cdot \theta_\gamma), \quad (k = 1, 2,..., N-2), \qquad (1)$$

Трудность реализации данного алгоритма состоит в выборе соответствия точек ς_γ единичной окружности угловому шагу интерполяции $\Delta\theta = 2\pi/N$. Образы z_γ этих точек на L называются узловыми точками, их расположение на контуре L неизвестно. Установление соответствия точек z_γ и ς_γ представляет собой сложную задачу, для решения которой применяются различные приближенные методы. В работе предложен вариант равномерного распределения узловых точек z_γ по контуру.

Далее рассчитываются внутренние углы α_k многоугольника L^*, которые вместе с узловыми точками $z^*{}_\gamma = \omega(\varsigma_\gamma^*)$ подставляются в интеграл Кристоффеля–Шварца

$$\omega^{**}(\xi) = D_1 \int_L \prod_{S=1}^{K_1} (\varsigma - \varsigma_S^*)^{\alpha_S} d\varsigma + D_0.$$

После процедуры расчета максимального отклонения δ точек z_γ^{**} от контура L можно прекратить, если δ меньше величины допустимой ошибки ε. Если $\delta > \varepsilon$ при выбранном N, то число точек на контуре L^{**} удваивается. Процедурой радиального сноса точек z_γ^{**} и новых промежуточных точек $z_{2\gamma}^{**}$ на контур L определяется их соответствием точкам ς_{2N+1}^{**}, после чего можно продолжить итерационный процесс, возвращаясь к формулам (1) тригонометрической интерполяции.